Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Fotografische Aufnahmematerialien haben eine bestimmte, feste Lichtempfindlichkeit. Sie liefern also das gleiche Ergebnis, solange die Belichtung – Lichtintensität mal Belichtungszeit – konstant ist. So jedenfalls die Theorie nach dem klassischen *Bunsen-Roscoe-Gesetz*. Demnach wäre es unerheblich, ob ein Film mit Blende 2 und $^1/_8$ s oder aber mit Blende 16 und 8 s belichtet wird. Die 64fache Lichtschwächung (Blende 2 auf 16) wird durch die 64fach längere Zeit wieder ausgeglichen: beide Zeit-Blenden-Kombinationen entsprechen dem gleichen Lichtwert 5. Die Praxis zeigt aber, daß dem nicht so ist: mit langen Belichtungszeiten bzw. genauer: bei sinkender Lichtintensität in der Filmebene, wird der Film tatsächlich zunehmend schwächer belichtet als erwartet. Er wird also unterbelichtet. Weil somit die umgekehrte Proportionalität von Lichtmenge und Belichtungszeit nicht mehr gilt, wird dieser Effekt im englischen Sprachraum *reciprocity failure* genannt. Hierzulande bezeichnet man den gleichen Effekt nach seinem Entdecker, dem deutschen Astronomen Karl Schwarzschild, als *Schwarzschildeffekt*.

Ursächlich für den Effekt ist dabei nicht die lange Belichtungszeit, sondern die geringe Intensität der auf den Film einwirkenden Lichtmenge. Beide Größen lassen sich aber über die konstante, für eine bestimmte Filmempfindlichkeit erforderliche Belichtung (Intensität mal Zeit) direkt ineinander umrechnen. Daher bezieht man sich beim Schwarzschildeffekt aus praktischen Gründen üblicherweise auf die Belichtungszeit: im Gegensatz zur eigentlich relevanten Beleuchtungsstärke in der Filmebene ist die Belichtungszeit direkt bekannt und eine gängige fotografische Größe.

Der Schwarzschildeffekt tritt erst unterhalb sehr niedriger Lichtintensitäten bzw. bei entsprechend langen Belichtungszeiten auf. Abgesehen von speziellen Typ L Filmen, die für lange Belichtungszeiten im Sekundenbereich vorgesehen sind, verhalten sich die meisten üblichen Aufnahmefilme im Bereich von etwa $^1/_{10.000}$ s bis $^1/_{10}$ s weitestgehend linear. Erst bei längeren Belichtungszeiten im Sekundenbereich macht sich der Schwarzschildeffekt bemerkbar, je nach Filmtyp auch schon früher oder auch erst später. In diesem Bereich ergibt eine Belichtung gemäß Belichtungsmesserangabe also eine mehr oder weniger deutliche Unterbelichtung, die zu korrigieren ist. Mit dieser Belichtungskorrektur befassen sich die folgenden Abschnitte.

Ein weitere Folge des Schwarzschildeffekts ist eine mehr oder weniger deutliche *Kontrastaufsteilung*. In den dunklen Motivteilen wird der Film mit besonders geringer Lichtintensität belichtet, so daß der Empfindlichkeitsverlust dort stärker ausfällt als in den hellen Bildteilen, in denen der Film einer höheren Lichtintensität ausgesetzt ist. Somit wird der Unterschied zwischen beiden, also der Kontrast, vergrößert. Diese Kontrastaufsteilung kann ggf. mit einer angepaßten Filmentwicklung ausgeglichen werden, was aber weitere Belichtungskorrekturen nach sich zieht. Dieser Aspekt wird hier nicht weiter diskutiert.

Farbfilme sind aus mehreren für unterschiedliche Farben empfindlichen Schichten aufgebaut, die in unterschiedlicher Weise vom Schwarzschildeffekt betroffen sein können. Das Ergebnis ist ein mehr oder weniger deutlicher Farbstich. Auch dieser Aspekt wird hier nicht weiter diskutiert.

2 Korrekturmöglichkeiten

Wenn bei geringen Intensitäten bzw. langen Belichtungszeiten der Film „unempfindlicher“ wird, würde eine unkorrigierte Belichtung zu einem unterbelichteten Bild führen. Also muß eine Belichtungskorrektur vorgenommen werden. Derartige Korrekturdaten sind in den Datenblättern der Filmhersteller zu finden. Die Korrektur kann dabei auf zweierlei Weise angegeben werden:

2.1 Korrektur über die Blende

Der Korrekturwert gibt an, um wieviele Stufen die Blende gegenüber dem gemessenen bzw. errechneten Wert geöffnet werden muß. Eine Korrekturtabelle kann dann etwa so aussehen:

Gemessene Zeit	Aufblenden um...
1 s	+1 Blende
10 s	+2 Blenden
100 s	+3 Blenden

2.2 Korrektur über die Belichtungszeit

Der Korrekturwert gibt hier direkt an, wie lange anstelle der gemessenen bzw. errechneten Belichtungszeit tatsächlich belichtet werden muß. Für den gleichen Film sähe eine solche Korrekturtabelle (gerundet) etwa so aus:

Gemessene Zeit	Erforderliche Zeit
1 s	3 s
10 s	70 s
100 s	30 min.

Beide Korrekturmethoden sind üblich und werden auch so in den Datenblättern der Filmhersteller angegeben.

Ganz wesentlich ist hier die Tatsache, daß man beide Korrekturmöglichkeiten *nicht* ineinander „fotografisch umrechnen“ kann. Das heißt konkret: eine Blendenkorrektur um eine Stufe ist ausdrücklich *nicht* das gleiche wie eine Korrektur um eine Zeitstufe, also eine Zeitverdopplung. Der Grund für diese Ungleichheit liegt im Schwarzschildeffekt selber: zwei rechnerisch gleichwertige Zeit-Blenden-Kombinationen liefern eben *nicht* die gleiche Belichtung, vielmehr ergibt die Kombination mit der längeren Belichtungszeit eine schwächere Belichtung. Die beiden obigen Beispiele zeigen das ebenfalls: Bei 10 s Belichtungszeit reicht ein Aufblenden um zwei Blendenstufen aus. Das entspräche rechnerisch der vierfachen Belichtungszeit. Tatsächlich muß bei einer Korrektur über die Belichtungszeit aber nicht nur 40, sondern volle 70 s lang belichtet werden.

Eine Korrektur über die Blende ist also in der Regel vorzuziehen, weil sie geringere Belichtungskorrekturen erfordert: durch die größere Blende erhöht sich die am Film ankommende Lichtmenge und das Schwarzschildproblem entschärft sich.

Für einige Anwendungen ist eine Blendenkorrektur allerdings nicht praktikabel. So etwa für die Lochkamerafotografie, wo die Blende nicht beliebig variiert werden kann. Daher erfolgt hier die Korrektur auf jeden Fall über die Belichtungszeit. Ein zweites Problem liegt darin, daß die Filmhersteller nur einige wenige Korrekturwerte für einen vergleichsweise kleinen Belichtungszeitenbereich angeben. Im folgenden wird daher eine Methode gezeigt, um aus den Herstellerangaben eine Formel zur Berechnung der „richtigen“ Belichtungszeiten abzuleiten, egal ob diese als Blendenkorrektur oder Zeitkorrektur vorliegen.

3 Erweiterte Schwarzschildformel

Um eine allgemeine Formel zu erhalten, mit der sich aus der gemessenen Belichtungszeit die tatsächlich erforderliche ergibt, empfiehlt sich zuerst ein Blick auf den grundlegenden Zusammenhang.

3.1 Ansatz

Schwarzschild hatte seinerzeit festgestellt, daß die Belichtung H nicht einfach das Produkt aus einer beliebigen Intensität I und einer dazugehörigen Belichtungszeit t ist, sondern daß mit abnehmender Intensität I und damit zunehmender Belichtungszeit t deren Einfluß auf die Belichtung H abnimmt.

Die klassische Bunsen-Roscoe-Formel („Reziprozitätsgesetz“)

$$H = I \cdot t$$

erweiterte er zu

$$H_S = I \cdot t^{\,p}$$

Dabei ist p der sog. *Schwarzschildexponent*. Sein Zahlenwert liegt unter 1. Schwarzschilds Formel besagt also, daß die Belichtung mit zunehmender Belichtungszeit schwächer ausfällt als nach der klassischen Formel zu erwarten wäre: H_S ist kleiner als H. Die Belichtung ändert sich nicht proportional mit der Belichtungszeit, sondern nur unterproportional.

Der Wert p gibt dabei an, wie stark die eintretende Belichtungsschwächung ausfällt. Für p = 1 ergibt sich überhaupt keine Schwächung, das entspricht der Bunsen-Roscoe-Formel „ohne Schwarzschildeffekt“. Tatsächlich liegt p für übliche Filme aber mehr oder weniger unter 1. Gängige Werte liegen zwischen etwa 0,6 und 0,95.

Der Exponent p gibt quasi die Abschwächung der „Zeitwirkung“ auf die Belichtung an. Man kann p so interpretieren, daß jede Verlängerung der Belichtungszeit um eine Stufe nur einer „Wirkung“ von p Blendenstufen entspricht. Für jede Stufe längere Belichtungzeit darf also im Gegenzug nicht um eine volle, sondern nur um p Stufen abgeblendet werden. Oder anders gesagt: jede längere Zeitstufe erfordert eine Belichtungskorrektur um 1 – p Blendenstufen gegenüber dem Meßwert.

Wenn eine Belichtung mit der gemessenen Belichtungszeit t tatsächlich nur die Belichtung H_S ergibt, muß diese Belichtungszeit mit dem Wert $^1/_p$ potenziert werden, um wieder die gewünschte Belichtung H zu erreichen. So erhält man die korrigierte Belichtungszeit τ :

$$\tau = t^{\,1/p}$$

Wegen $p < 1$ ist $\tau > t$. Erst mit dieser längeren Belichtungszeit τ ergibt sich wieder die geplante Belichtung H.

Ein wesentlicher Punkt liegt darin, daß t und τ *nicht* die absolute Belichtungszeit angeben. Konkret: t = 1 meint keineswegs „eine Sekunde Belichtungszeit“, genauso wenig wie „eine Minute“ oder „eine Millisekunde“. Schließlich ist keine Zeiteinheit angegeben. Rein rechnerisch ergäbe sich für $t < 1$ sogar eine Verkürzung der Belichtungszeit. Die Formel gilt also erst für $t > 1$. Tatsächlich sind t und τ dimensionslos und bezeichnen *relative* Belichtungszeiten: relativ zu einer bestimmten Belichtungszeit t_0. Es wird dabei angenommen, daß die Belichtung bis zu dieser Zeit t_0 linear (nach dem Reziprozitätsgesetz) verläuft und erst darüberhinaus der Schwarzschildeffekt zuschlägt. Ab t_0 sei der Effekt dann vorhanden und zeige sich darin, daß nun jede weitere Belichtungszeitstufe nur noch eine Wirkung von p Blendenstufen hat.

Aus

$$t = t_m : t_0$$

und

$$\tau = t_s : t_0$$

ergibt sich so

$$t_s : t_0 = (t_m : t_0)^{1/p}$$

und damit

$$t_s = t_0 \cdot (t_m : t_0)^{1/p}$$

Diese Formel gibt direkt die einzustellende Belichtungszeit t_s an, wenn eine Zeit von t_m gemessen wurde. Wir bezeichnen sie hier als *erweiterte Schwarzschildformel*.

3.2 Anwendungsbeispiel

Ein Film habe die Daten t_0 = ¼ s und p = 0,8. Nach dem Gesagten heißt das also: ab ¼ s aufwärts „wirkt“ jede längere Belichtungzeitstufe nur noch wie 0,8 Blendenstufen. Also muß von da an für jede weitere Zeitstufe um 0,2 Blendenstufen aufgeblendet werden:

t_m	Korrektur k
¼ s	0
½ s	+0,2 Blenden
1 s	+0,4 Blenden
2 s	+0,6 Blenden
4 s	+0,8 Blenden
8 s	+1,0 Blenden

Gemäß der im letzten Abschnitt gewonnenen erweiterten Schwarzschildformel kann man auch direkt die korrigierte Belichtungszeit errechnen. Dabei ergeben sich folgende Werte:

t_m	korrigierte Zeit t_s
¼ s	¼ s
½ s	0,6 s
1 s	1,4 s
2 s	3,4 s
4 s	8,0 s
8 s	19,0 s

Das Rechenmodell funktioniert also recht eingängig und schlüssig. Sofern die Werte von t_0 und p bekannt sind, kann man für beliebige gemessene Belichtungszeiten eine Blendenkorrektur oder auch direkt die stattdessen einzustellende Belichtungszeit angeben. Nur – wie kommt man an die filmspezifischen Werte für die beiden Parameter? Damit sind wir beim Kernproblem, der Herleitung dieser beiden Parameter aus bekannten Daten. Etwa denen des Herstellers in seinen Datenblättern. Sind diese Parameter erst einmal bekannt, läßt sich zu jeder Belichtungszeit direkt die notwendige Korrektur angeben.

4 Ermitteln von t_0 und p aus Herstellerdaten

Wir wissen, wie sich für jede Belichtungszeit die zugehörige Korrektur bei Blende oder Zeit ermitteln läßt. Dazu sind nur noch die bisher unbekannten Parameter t_0 und p erforderlich. Diese kann man aus den Herstellerwerten zurückrechnen. Dazu entnehmen wir den Herstellerdaten zwei bekannte Korrekturwerte und errechnen daraus die beiden gesuchten Parameter. Die Rückrechnung geschieht also über zwei Belichtungszeiten t_m, für die entweder die dazugehörigen korrigierten Belichtungszeiten t_s oder die Blendenkorrekturen k bekannt sind.

4.1 Berechnung aus Zeitkorrektur

Liegen die bekannten Korrekturwerte als korrigierte Belichtungszeit vor, kann man diese direkt in die erweiterte Schwarzschildformel einsetzen und die beiden resultierenden Gleichungen nach p und t_0 auflösen. Dabei erhält man folgende Lösung:

$$p = \ln(t_{m1} : t_{m2}) \ : \ \ln(t_{s1} : t_{s2})$$

und dann

$$t_0 = (t_{s1}{}^{p} : t_{m1})^{1/(p-1)}$$

4.2 Berechnung aus Blendenkorrektur

Liegen die Herstellerangaben als Blendenkorrektur vor, können p und t_0 besonders leicht bestimmt werden. Bekanntlich gibt 1 – p an, um wieviele Blendenstufen aufgeblendet werden muß, wenn die Belichtungszeit um eine Stufe verlängert wird. Wenn nun z.B. 3 Stufen Belichtungszeitunterschied ein weiteres Aufblenden um +1 Stufe erfordert, erfordert *eine* Stufe Belichtungszeit also $+^1/_3$ Blende und p ist somit $1 - {}^1/_3 = {}^2/_3$. Oder allgemein:

$$p = 1 - \ln 2 \cdot (b_1 - b_2) : \ln(t_{m1} : t_{m2})$$

Der Wert für t_0 läßt sich ebenfalls leicht ermitteln, denn bei t_0, am Übergang vom linearen auf den schwarzschildrelevanten Belichtungszeitenbereich, ist die Blendenkorrektur gerade gleich Null. Wenn also eine bestimmte Belichtungszeit t_m genau k Blenden an Korrektur erfordert, und pro Zeitstufe 1 – p Blenden Korrektur nötig sind, braucht man von der genannten Belichtungszeit lediglich k : (1 – p) Zeitstufen abzurechnen. So erhält man

$$t_0 = t_m \cdot 2^{k : (p-1)}$$

4.3 Berechnung der korrigierten Belichtungszeit

Nachdem die beiden Parameter t_0 und p nun bekannt sind, läßt sich zu jeder beliebigen gemessenen Belichtungszeit t_m die korrigierte Belichtungszeit t_s bestimmen. Die Rechnung geschieht über die schon oben hergeleitete erweiterte Schwarzschildformel:

$$t_s = t_0 \cdot (t_m : t_0)^{1/p}$$

4.4 Berechnung der Blendenkorrektur

Anstatt einer Verlängerung der Belichtungszeit kann auch eine gleichwertige Korrektur durch Öffnen der Blende erzielt werden. Dieses Verfahren hat, wie schon beschrieben, seine technischen Vorteile, ist aber leider nicht immer praktikabel. Die Berechnung ist sehr einfach: man bestimmt, um wieviele Zeitstufen die fragliche Belichtungszeit von t_0 entfernt ist und multipliziert diesen Abstand mit der pro Stufe notwendigen Korrektur 1 – p. Somit erhält man für eine gemessene Belichtungszeit t_m die erforderliche Korrektur in Blendenstufen k wie folgt:

$$k \quad = \quad (1 - p) \cdot \ln(t_m : t_0) : \ln 2$$

4.5 Grenzen der Schwarzschildformel

In allen Fällen hängt das Ergebnis davon ab, welche konkreten Wertepaare des Datenblatts man für die Rückrechnung verwendet. Es macht also durchaus einen Unterschied, ob man die Berechnung anhand der bekannten Korrekturwerte für zwei kurze oder für zwei lange Belichtungszeiten durchführt. Der Grund liegt darin, daß die Schwarzschildformel ein stark vereinfachtes rechnerisches Abbild der Wirklichkeit ist und, anschaulich gesagt, der Film eigentlich „anders funktioniert" als es die Formel verspricht. Es ist eben doch nur ein Rechenmodell. Beispielsweise gibt es natürlich keinen abrupten Übergang vom linearen auf den schwarzschildrelevanten Belichtungszeitenbereich, der zudem noch genau bei t_0 beginnt – der Übergang ist kontinuierlich. Die Werte t_0 und p sind auch keine absoluten Konstanten, sondern können sich mit der Belichtungszeit ändern. Daher wählt man zweckmäßigerweise für die Rückrechnung solche Wertepaare, die dem benutzten Belichtungszeitenbereich möglichst nahe kommen. Nachdem es hier insbesondere um Werte für sehr lange, in den Datenblättern nicht mehr dokumentierte Belichtungszeiten geht, wird man oft die beiden längsten noch angegebenen Belichtungszeiten für die Berechnung heranziehen. Ein weiterer Vorteil liegt dann darin, daß eine eventuelle Ungenauigkeit bei den kurzen Belichtungszeiten i.d.R. nicht besonders schwerwiegend ist, weil hier ohnehin nur vergleichsweise geringe Belichtungskorrekturen nötig sind.

Alles in allem kann man schließen, daß die errechneten Werte nicht allzu genau zu nehmen sind. Es hat keinen Sinn, über eine Korrektur auf 200 oder 250 Sekunden Belichtungszeit zu diskutieren, solange nicht klar ist, wie genau das verhältnismäßig simple Rechenmodell überhaupt die Eigenschaften des konkreten Filmmaterials beschreibt.

5 Schwarzschildkorrektur per Regressionsanalyse

Die bisherige Rechnung basiert darauf, die beiden Parameter t_0 und p aus zwei bekannten Wertepaaren [t_m ; t_s] exakt zurückzurechnen. Die erhaltenen Parameter ergeben dann für diese beiden Werte t_m wieder exakt die dazugehörigen korrigierten Zeiten t_s der Ausgangsdaten. Wie schon in 4.5 gesagt, hängt das Ergebnis der Rechnung aber stark von den ausgewählten Werten ab: Zwei bestimmte Wertepaare können ein ganz anderes Ergebnis liefern als zwei andere. Mehr als zwei Wertepaare können aber nicht verwendet werden, weil die Schwarzschildkurve in ihrer angenommenen Form durch zwei Punkte bereits eindeutig bestimmt ist.

Man kann stattdessen aber auch einen ganz anderen Ansatz wählen: es werden *sämtliche* bekannten Werte betrachtet und dabei versucht, für diese einen „möglichst gut passenden“ Zusammenhang zu finden. Konkret: die bekannten Wertepaare [t_m ; t_s] sollen durch eine „möglichst gut passende“ Kurve angenähert werden. Für diese Aufgabe gibt es das aus der Statistik bekannte Verfahren der linearen und nichtlinearen Regression, das sich hier recht problemlos anwenden läßt.

Nachdem eine grundlegende Erläuterung der Regressionsrechnung den gegebenen Rahmen bei weitem sprengen würde, werden im folgenden Grundkenntnisse der (nicht-) linearen Regressionsanalyse (*Kleinste-Quadrate-Methode, Least-Square-Regression*) und der dazugehörige Rechengang als bekannt vorausgesetzt. Es geht hier nur um die Anwendung dieser Technik auf die Schwarzschildrechnung.

Wer die folgende Rechnung nicht nachvollziehen möchte, kann sich die Methode dennoch folgendermaßen veranschaulichen: Für mehrere Belichtungszeiten sind die dazugehörigen schwarzschildkorrigierten Zeiten bekannt. Trägt man diese Wertepaare in ein Koordinatensystem ein, lassen sich die Punkte durch eine kontinuierlich ansteigende Kurve verbinden. Mitunter findet sich eine solche Kurve sogar im Datenblatt des Filmherstellers. Eine solche „möglichst gut passende“ Kurve, die den Zusammenhang zwischen gemessenen und korrigierten Belichtungszeiten angibt, kann man rechnerisch bestimmen. Besonders leicht geht das, wenn man die Kurve linearisiert. Dazu wählt man auf der/den Belichtungszeitachse(n) eine logarithmische Skalierung. Oder anders ausgedrückt: man skaliert die Zeitachse(n) in Belichtungsstufen. Zeiten wie 1, 2, 4 und 8 Sekunden liegen also gleich weit auseinander. Trägt man die bekannten Werte in dieses Koordinatensystem ein, liegen die Punkte nun mehr oder weniger auf einer Geraden. Die ließe sich pragmatisch per Augenmaß mit einem Lineal bestimmen – oder aber rechnerisch exakt über eine lineare Regression.

5.1 Ansatz

In den Abschnitten 4.3 und 4.4 ist der grundlegende Zusammenhang zwischen gemessener Belichtungszeit t_m und wahlweise der korrigierten Zeit t_s oder der Belichtungskorrektur k in Blendenstufen angegeben:

$$t_s = t_0 \cdot (t_m : t_0)^{1/p}$$

bzw.

$$k = (1 - p) \cdot \ln (t_m : t_0) : \ln 2$$

Beide Gleichungen lassen sich durch Umformen leicht linearisieren, so daß sich ein Ausdruck in Form der allgemeinen Geradengleichung $y = a + b \cdot x$ ergibt. Für diesen kann man eine Ausgleichsgerade bestimmen, die wieder einen Zusammenhang zwischen t_m und t_s bzw. zwischen t_m und k herstellt, welcher die Ausgangsdaten „möglichst gut“ annähert.

5.2 Berechnung aus Zeitkorrektur

Nach einfacher Umformung ergibt sich für die Korrektur per verlängerter Belichtungszeit:

$$t_s = t_0^{\,1-1/p} \cdot t_m^{\,1/p}$$

Der Faktor vor t_m ist eine Konstante, der Exponent bei t_m ebenso. Bezeichnet man diese beiden Konstanten mit a und b, erhält man

$$t_s := a \cdot t_m^{\,b}$$

Daraus läßt sich durch Logarithmieren leicht eine lineare Gleichung ableiten:

$$\ln t_s = \ln a + b \cdot \ln t_m$$

Damit haben wir einen linearen Zusammenhang zwischen $\ln t_m$ und $\ln t_s$. Das heißt: bei der Berechnung der Ausgleichsgeraden setzt man anstatt der Ursprungswerte t_m und t_s ihre Logarithmen an. Als Ergebnis der Regressionsrechnung erhält man als Geradensteigung direkt den Parameter b sowie als Y–Achsenabschnitt den natürlichen Logarithmus von a. Nach Delogarithmieren ($e^{\ln a}$) bekommt man wieder a selbst.

Zu jeder Belichtungszeit t_m kann nun über den Zusammenhang $t_s = a \cdot t_m^b$ wieder die korrigierte Belichtungszeit t_s ermittelt werden.

Aus den Werten a und b lassen sich natürlich auch wieder die klassischen Schwarzschildparameter t_0 und p zurückrechnen. Man braucht die obige Substitution nur umzustellen:

$$p = 1 : b$$
$$t_0 = a^{\,1/(1-b)}$$

Mit diesen Werten kann man wieder die erweiterte Schwarzschildformel anwenden und erhält die gleichen Ergebnisse wie über die vereinfachte Form $a \cdot t_m^{\,b}$.

5.3 Berechnung aus Blendenkorrektur

Auch die Belichtungskorrektur über die Blende kann so umgeformt werden, daß sich ein linearer Zusammenhang ergibt, den man ebenso vereinfacht mit zwei Konstanten a und b schreiben kann:

$$k = (p-1) : (t_0 \cdot \ln 2) + (1-p) : \ln 2 \cdot \ln t_m$$
$$:= a + b \cdot \ln t_m$$

Man kann also eine einfache lineare Regression (Ausgleichsgerade) berechnen, wenn man bei den Wertepaaren der Ausgangsdaten statt der Belichtungszeiten t_m ihre Logarithmen ansetzt. Als Ergebnis der Rechnung erhält man die Parameter a (Achsenabschnitt) und b (Steigung) der Regressionsgeraden. Über den Zusammenhang $k = a + b \cdot \ln t_m$ kann nun zu jeder Belichtungszeit t_m die zugehörige Blendenkorrektur k angegeben werden.

Aus den Werten a und b lassen sich auch hier wieder die Schwarzschildparameter t_0 und p zurückrechnen. Wiederum braucht man nur die ursprüngliche Substitution umzustellen:

$$p = 1 - b \cdot \ln 2$$
$$t_0 = e^{-a/b}$$

Mit diesen Werten kann man wieder die Blendenkorrekturformel aus 4.4 anwenden und erhält die gleichen Ergebnisse wie über die vereinfachte Form $a + b \cdot \ln t_m$.

5.4 Regression mit Standardsoftware

Die Berechnungen der vorigen Abschnitte braucht man nicht „zu Fuß“ durchzuführen – Regressionsanalysen sind nicht nur mit spezieller Statistiksoftware möglich, sondern auch mit weit verbreiteten Programmen, etwa einer gängigen Tabellenkalkulation. Man legt einfach ein XY-Punktdiagramm an, das die bekannten Wertepaare darstellt, und fügt dann eine Trendlinie ein, deren Formel man sich ebenfalls anzeigen läßt. Sind zu den t_m-Werten die korrigierten Zeiten t_s bekannt, wählt man eine Potenzfunktion. Sind hingegen die Blendenkorrekturen k bekannt, wählt man eine logarithmische Funktion. Auf diese Weise läßt sich auch gleich eine Graphik zum Ausdrucken und Mitnehmen erstellen.

Darüberhinaus gehört die Regressionsanalyse zum Anwendungsspektrum verschiedener wissenschaftlicher Taschenrechner. Einige bieten zumindest eine lineare Einfachregression per Tastendruck, für programmierbare Taschenrechner oder PDAs ist meist ein entsprechendes Programm oder Programmpaket erhältlich.

5.5 Grenzen der Regressionsrechnung

Wie schon die „klassische Methode“, so hat auch die Regressionsrechnung ihre Grenzen. Die Methode führt eine „möglichst gute“ Kurvenanpassung nach dem Kleinste-Quadrate-Kriterium durch. Die Grundform der Kurve ist dabei wie schon bei der Schwarzschildformel vorgegeben, woraus sich auch die gleichen grundsätzlichen Einschränkungen ergeben: der Film „funktioniert“ anders als das Rechenmodell. Allerdings ist die Regressionsrechnung weitaus weniger anfällig für Schwankungen, die sich durch die Auswahl der konkreten Wertepaare ergeben – es werden schließlich alle vorhandenen Wertepaare verrechnet. Daher beschreibt sie mit guter Genauigkeit eine Kurve durch die bereits bekannten Werte (Interpolation). Die Genauigkeit extrapolierter Werte hängt dagegen davon ab, ob und wie sehr sich die Schwarzschildparameter mit der Belichtungszeit ändern. Über geeignete statistische Methoden ließe sich immerhin ein Konfidenzintervall angeben.

Man kann aber durchaus eine Gewichtung vornehmen: Wenn es um die Extrapolation für längere Belichtungszeiten geht als sie der Hersteller noch angibt, und man dabei einmal unterstellt, daß der „wahre“ Zusammenhang bei sehr langen Belichtungszeiten noch am genauesten aus den Wertepaaren mit den längsten Belichtungszeiten abzuleiten ist, kann man in einem solchen Fall durchaus diese Wertepaare gleich mehrfach in die Rechnung übernehmen. Statt mit beispielsweise vier Wertepaaren rechnet man also mit deren sechs, wobei die beiden zusätzlichen einfach noch einmal den schon bekannten mit der längsten Belichtungszeit entsprechen. Ebenso kann man Ausreißer-Wertepaare aus der Rechnung herausnehmen. Das gleiche läßt sich mit weniger interessanten Korrekturwerten für eher kurze Belichtungszeiten machen. Die Schätzfunktion kann dadurch ggf. genauer werden.

6 Vollständige Beispielrechnung

Wir nehmen als Beispiel einen Film, zu dem der Hersteller im Datenblatt eine Graphik angibt, aus der man folgende Korrekturwerte ablesen kann:

Gemessene Zeit	Erforderliche Zeit
2 s	3 s
6 s	12 s
10 s	23 s
16 s	50 s

6.1 Berechnung per Schwarzschildformel

Nachdem wir besonders an langen, nicht mehr dokumentierten Belichtungszeiten interessiert sind, nehmen wir für die Berechnung die beiden längsten angegebenen Zeiten, also t_{m1} = 10 s und t_{m2} = 16 s sowie t_{s1} = 23 s und t_{s2} = 50 s. Die Korrekturwerte liegen als Zeitkorrektur vor. Gemäß 4.1 ergeben sich folgende Parameter:

$$p = \ln(10 : 16) \; : \; \ln(23 : 50)$$
$$p = 0{,}60526$$

sowie

$$t_0 = (23^{\,0{,}60526} : 10)^{\,1 / (0{,}60526 - 1)}$$
$$t_0 = 2{,}7884 \text{ s}$$

Damit läßt sich nun für jede gemessene Belichtungszeit die zugehörige korrigierte Zeit für eine korrekte Belichtung angeben, oder auch stattdessen die notwendige Korrektur über die Blende ermitteln. Über die in 4.3 und 4.4 angegebenen Formeln erhält man beispielsweise für t_m = 32 s eine erforderliche korrigierte Belichtungszeit t_s von

$$t_s = 2{,}7884 \cdot (32 : 2{,}7884)^{\,1/0{,}60526}$$
$$t_s = 157{,}2 \text{ s}$$

Alternativ kann man stattdessen auch eine Korrektur über die Blende vornehmen:

$$k = (1 - 0{,}60526) \cdot \ln(32 : 2{,}7884) \; : \; \ln 2$$
$$k = 1{,}35 \text{ Blendenstufen}$$

Auf diese Weise kann man eine vollständige Tabelle erstellen (Werte gerundet):

Gemessene Zeit	Erforderliche Zeit	*oder*	Blendenkorrektur
4 s	5 s		+0,2 Stufen
8 s	16 s		+0,6 Stufen
16 s	50 s		+1,0 Stufen
32 s	157 s		+1,4 Stufen
64 s	500 s		+1,8 Stufen
300 s	6300 s		+2,7 Stufen

Nachdem die Schwarzschildformel nur für Belichtungszeiten ab t_0 gilt, können in diesem Fall nur die Werte für Belichtungszeiten ab 2,8 s bestimmt werden. Die Formel nimmt an, daß der Film unterhalb dieser Belichtungszeit noch linear arbeitet, also keine Korrektur erforderlich ist.

Rechnet man nun das gleiche Beispiel wie oben mit $t_{m1} = 2$ s und $t_{s1} = 3$ s , erhält man hingegen andere Werte: p = 0,7391 und $t_0 = 0{,}6341$. In diesem Fall ergeben sich folgende Korrekturwerte:

Gemessene Zeit	Erforderliche Zeit	*oder* Blendenkorrektur
2 s	3 s	+0,4 Stufen
4 s	8 s	+0,7 Stufen
8 s	20 s	+1,0 Stufen
16 s	50 s	+1,2 Stufen
32 s	128 s	+1,5 Stufen
64 s	330 s	+1,7 Stufen
300 s	2600 s	+2,3 Stufen

Die Ergebnisse zeigen, daß die ganze Mathematik hinter der Sache letztlich doch nur für eine recht grobe Abschätzung der Belichtungskorrektur gut ist. Letztlich fährt man in der Praxis auch nicht schlechter, wenn man im Mittel von $p = {}^2/_3$ und $t_0 = 1$ s ausgeht. Die Ergebnisse liegen dann zwischen den beiden errechneten, haben aber aufgrund der runden Zahlenwerte den Vorteil, daß man Korrekturwerte auch problemlos im Kopf ermitteln kann: Ab 1 s Belichtungszeit gibt man pro Zeitstufe einfach $1 - p = {}^1/_3$ Blende zu.

6.2 Berechnung per Regressionsfunktion

Die vier vorliegenden Wertepaare werden zunächst durch Logarithmieren von t_m und t_s linearisiert:

$\ln t_m$	$\ln t_s$
0,69315	1,09861
1,79176	2,48491
2,30259	3,13549
2,77259	3,91202

Aus diesen Daten erhält man die Regressionsgerade

$$\ln t_s = 0{,}13872 + 1{,}33281 \cdot \ln t_m$$

Damit ist $a = e^{0,13872} = 1{,}1488$ und $b = 1{,}3328$. Also kann die korrigierte Belichtungszeit t_s direkt berechnet werden:

$$t_s = 1{,}1488 \cdot t_m^{1,3328}$$

Aus a und b lassen sich ebenfalls die bekannten Schwarzschildparameter rückrechnen:

$$t_0 = 1{,}1488^{\,1/(1-1{,}3328)}$$
$$t_0 = 0{,}6591$$

und

$$p = 1 : 1{,}3328$$
$$p = 0{,}7503$$

Sowohl bei Rechnung über die Regressionsfunktion als auch über die erweiterte Schwarzschildfunktion mit obigen Parametern ergeben sich folgende Korrekturwerte:

Gemessene Zeit	Erforderliche Zeit	*oder* Blendenkorrektur
2 s	3 s	+0,4 Stufen
4 s	7 s	+0,6 Stufen
8 s	18 s	+0,9 Stufen
16 s	46 s	+1,1 Stufen
32 s	116 s	+1,4 Stufen
64 s	293 s	+1,6 Stufen
300 s	2300 s	+2,2 Stufen

Rechenbeispiel für $t_m = 32$ s :

$$t_s = 1{,}1488 \cdot 32^{\,1{,}3328}$$
$$t_s = 116{,}5\ s$$

Für lange Belichtungszeiten ergibt sich möglicherweise eine bessere Genauigkeit, wenn für die Regression das Wertepaar mit der kürzesten Belichtungszeit weggelassen und dafür das mit der längsten Zeit doppelt genommen wird. Rechnet man mit diesen Daten, ergibt sich $p = 0{,}680$ und $t_0 = 1{,}472$. Für diese Werte und $t_s = 32$ s errechnet sich eine korrigierte Zeit von $t_s = 136$ s. Der Unterschied zur vorigen Berechnung ist vernachlässigbar. Für 300 s ergibt sich mit der neuen Rechnung aber bereits eine korrigierte Zeit von 3600 s, also eine volle Stunde.

7 Schwarzschildmathematik in der Praxis

Natürlich sind die vorgenannten Rechnungen nur einmal erforderlich, um die relevanten Eigenschaften des Films zu bestimmen. Für die praktische Anwendung kann man sich eine Korrekturtabelle zusammenstellen, ähnlich den im vorigen Abschnitt errechneten.

Oft kann man den Sachverhalt noch einfacher formulieren. So etwa für das Ergebnis, das vorhin über die Regressionsanalyse erhalten wurde: nachdem p recht genau 0,75 ist, muß für jede Belichtungsstufe ab 0,65 s die Blende um $1 - p = \frac{1}{4}$ Stufe geöffnet werden. Wenn man t_0 noch auf ½ s rundet, ergibt sich so eine leicht zu merkende Regel: ab ½ s Belichtungszeit wird einfach alle zwei Zeitstufen um eine halbe Blende aufgeblendet. Oft kann man aus den errechneten Ergebnissen solche einfachen Merkregeln ableiten.

Überhaupt lassen sich die Schwarzschildparameter oft schon direkt aus den gegebenen Blendenkorrekturwerten in den Herstellerangaben ablesen. Ein Beispiel:

Gemessene Zeit	Aufblenden um...
1 s	+0,5 Blenden
8 s	+1,0 Blenden
30 s	+1,5 Blenden

Offenbar muß alle drei Zeitstufen um eine weitere halbe Blende aufgeblendet werden. Das macht also pro Zeitstufe $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ Blende. Somit hat der Film einen Schwarzschild-exponenten von $p = 1 - \frac{1}{6} = 0{,}833$.

Ähnlich einfach läßt sich hier t_0 ermitteln: Das ist definitionsgemäß die längste Zeit, bei der noch keinerlei Belichtungskorrektur erforderlich ist. Wenn bei 1 s eine halbe Blende aufblenden nötig ist und die Belichtung pro Zeitstufe um eine weitere $\frac{1}{6}$ Blende zu korrigieren ist, wird die Korrektur dann Null, wenn man von 1 s aus drei weitere Zeitstufen abrechnet. So landet man bei $t_0 = \frac{1}{8}$ s.